Corrigés des exercices 1.7 à 1.12: حلول التمارين من 7.1 إلى 12.1

Exercice1.7 :

Calculons d'abord l'épaisseur du cylindre : $\boxed{e = \dfrac{D_2 - D_1}{2}}$; $\boxed{e=3{,}6\text{mm}}$

L'incertitude absolue sur l'épaisseur est donc : $\boxed{\Delta e = \dfrac{\Delta D_2 + \Delta D_1}{2}}$; $\boxed{\Delta e = \pm 0{,}1mm}$

Ecrivons le résultat de la mesure : $\boxed{e = (3{,}6 \pm 0{,}1)\,mm}$

Nous en déduisons l'incertitude relative : $\dfrac{\Delta e}{e} = \dfrac{0{,}1}{3{,}6} \Rightarrow \boxed{\dfrac{\Delta e}{e} = 0{,}03 = 3\%}$

Exercice 1.8 :

Calcul de la masse volumique : $\boxed{\rho = \dfrac{m}{V} = \dfrac{m}{a^3}}$ $\boxed{\rho=3{,}041\text{g/cm}^3}$

Nous déduisons l'incertitude absolue de l'incertitude relative :

$$\frac{\Delta\rho}{\rho} = \frac{\Delta m}{m} + 3\frac{\Delta a}{a} \Rightarrow \boxed{\Delta\rho = \rho\left(\frac{\Delta m}{m} + 3\frac{\Delta a}{a}\right)} \quad \boxed{\Delta\rho \simeq 0{,}02\,g/cm^3}$$

D'où l'incertitude relative : $\dfrac{\Delta\rho}{\rho} = 0{,}0063 = 6{,}3\ {}^0/_{00}$

Ecriture du résultat de la mesure : $\boxed{\rho = (3{,}04 \pm 0.02)\,g/cm^3}$

Remarque importante :

Le nombre des chiffres significatifs conservés dans un résultat ne doit jamais impliquer une précision supérieure à celle des données.

Un calcul ne peut qu'aboutir à un résultat dont l'incertitude sera au moins égale à celle de la donnée la moins précise.

Exercice 1.9 :

Nous avons l'expression : $\delta = \dfrac{m_2 - m_1}{m_3 - m_1}$

Remarquons que les trois masses sont dépendantes.

Appliquons la fonction logarithmique aux deux membre de l'équation :

$$\log\delta = \log(m_2 - m_1) - \log(m_3 - m_1)$$

Passons à la différentielle logarithmique :

$$\frac{d\delta}{\delta} = \frac{d(m_2 - m_1)}{m_2 - m_1} - \frac{d(m_3 - m_1)}{m_3 - m_1}$$

Développons : $\dfrac{d\delta}{\delta} = \dfrac{dm_2}{m_2 - m_1} - \dfrac{dm_1}{m_2 - m_1} - \dfrac{dm_3}{m_3 - m_1} + \dfrac{dm_1}{m_3 - m_1}$

Factorisons : $\dfrac{d\delta}{\delta} = dm_1\left(\dfrac{1}{m_3 - m_1} - \dfrac{1}{m_2 - m_1}\right) + \dfrac{dm_2}{m_2 - m_1} - \dfrac{dm_3}{m_3 - m_1}$

Passons à présent aux incertitudes relatives, en remplaçant di par Δi et en changeant le signe $(-)$ des facteurs communs par le signe $(+)$, et en supposant $\Delta m_1 = \Delta m_2 = \Delta m_3 = \Delta m$ (puisque nous utilisons la même balance). Il vient :

$$\frac{\Delta\delta}{\delta} = \Delta m\left(\frac{1}{m_3 - m_1} - \frac{1}{m_2 - m_1}\right) + \frac{\Delta m}{m_2 - m_1} + \frac{\Delta m}{m_3 - m_1}$$

Nous obtenons à la fin : $\boxed{\dfrac{\Delta\delta}{\delta} = \dfrac{2\Delta m}{m_3 - m_1}}$

<u>Exercice 1.10</u> :

<u>a/ Groupement en parallèle</u> :

La capacité du condensateur équivalent à deux condensateurs montés en parallèle est donnée par la formule : $C = C_1 + C_2$.

Appliquons la fonction logarithmique aux deux membres de l'équation puis passons à la différentielle logarithmique :

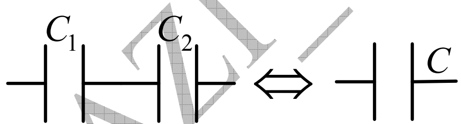
$$\log C = \log\left(C_1 + C_2\right) \Rightarrow \frac{dC}{C} = \frac{dC_1}{C_1 + C_2} + \frac{dC_2}{C_1 + C_2}$$

L'incertitude relative est donc :

$$\boxed{\frac{\Delta C}{C} = \frac{\Delta C_1}{C_1 + C_2} + \frac{\Delta C_2}{C_1 + C_2}} \Leftrightarrow \boxed{\frac{\Delta C}{C} = \frac{\Delta C_1}{C_1}\left(\frac{C_1}{C_1 + C_2}\right) + \frac{\Delta C_2}{C_2}\left(\frac{C_2}{C_1 + C_2}\right)}$$

b/ <u>Groupement en série</u> :

La capacité du condensateur équivalent à deux condensateurs montés en série est donnée par la formule :



$$\frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} \Rightarrow C = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2}$$

Appliquons la fonction logarithmique aux deux membres de l'équation puis passons à la différentielle logarithmique :

$$\log C = \log\left(\frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2}\right) \Rightarrow \log C = \log C_1 + \log C_2 - \log\left(C_1 + C_2\right)$$

L'incertitude relative est donc :

$$\frac{dC}{C} = \frac{dC_1}{C_1} + \frac{dC_2}{C_2} - \frac{dC_1}{C_1 + C_2} - \frac{dC_2}{C_1 + C_2}$$

Factorisons : $\dfrac{dC}{C} = dC_1\left(\dfrac{1}{C_1} - \dfrac{1}{C_1 + C_2}\right) + dC_2\left(\dfrac{1}{C_2} - \dfrac{1}{C_1 + C_2}\right)$

L'expression précédente peut être écrite sous la forme :

$$\frac{dC}{C} = \frac{dC_1}{C_1}\left(1 - \frac{C_1}{C_1 + C_2}\right) + \frac{dC_2}{C_2}\left(1 - \frac{C_2}{C_1 + C_2}\right)$$

Finalement l'incertitude relative demandée est :

$$\boxed{\frac{\Delta C}{C}=\frac{\Delta C_1}{C_1}\left|1-\frac{C_1}{C_1+C_2}\right|+\frac{\Delta C_2}{C_2}\left|1-\frac{C_2}{C_1+C_2}\right|}$$

Exercice 1.11 :

Ecrivons l'expression donnée sous la forme : $\mu+m_1=\dfrac{m_2\left(\theta_2-\theta_m\right)}{\theta_m-\theta_1}$

En introduisant la fonction logarithmique dans les deux membres de l'équation nous obtenons :

$$\log\left(\mu+m_1\right)=\log m_2+\log\left(\theta_2-\theta_m\right)-\log\left(\theta_m-\theta_1\right)$$

La différentielle logarithmique de l'expression précédente est :

$$\frac{d\left(\mu+m_1\right)}{\mu+m_1}=\frac{dm_2}{m_2}+\frac{d\theta_2}{\theta_2-\theta_m}-\frac{d\theta_m}{\theta_2-\theta_m}-\frac{d\theta_m}{\theta_m-\theta_1}+\frac{d\theta_1}{\theta_m-\theta_1}$$

Ou bien : $\dfrac{d\mu}{\mu+m_1}=-\dfrac{dm_1}{\mu+m_1}+\dfrac{dm_2}{m_2}+\dfrac{d\theta_2}{\theta_2-\theta_m}-\dfrac{d\theta_m}{\theta_2-\theta_m}-\dfrac{d\theta_m}{\theta_m-\theta_1}+\dfrac{d\theta_1}{\theta_m-\theta_1}$

C'est-à-dire :

$$d\mu=-dm_1\frac{\mu+m_1}{\mu+m_1}+dm_2\frac{\mu+m_1}{m_2}+d\theta_2\frac{\mu+m_1}{\theta_2-\theta_m}-d\theta_m\frac{\mu+m_1}{\theta_2-\theta_m}-d\theta_m\frac{\mu+m_1}{\theta_m-\theta_1}+d\theta_1\frac{\mu+m_1}{\theta_m-\theta_1}$$

Et en fin, l'incertitude absolue demandée est :

$$\boxed{\Delta\mu=+\Delta m_1+\Delta m_2\left(\frac{\mu+m_1}{m_2}\right)+\Delta\theta_2\left(\frac{\mu+m_1}{\theta_2-\theta_m}\right)+\Delta\theta_m\left(\frac{\mu+m_1}{\theta_2-\theta_m}+\frac{\mu+m_1}{\theta_m-\theta_1}\right)+\Delta\theta_1\left(\frac{\mu+m_1}{\theta_m-\theta_1}\right)}$$

Exercice 1.12 :

Après introduction de la fonction logarithmique dans les deux membres de l'équation nous obtenons : $\log y=\log y_0+\log e^{-\omega t}$

Sa différentielle est :

$$\log y=\log y_0+\log e^{-\omega t}\Rightarrow\log y=\log y_0-\omega t$$

$$d\left(\log y\right)=d\left(\log y_0\right)-d\left(\omega t\right)$$

Posons $X=\omega t\Rightarrow\dfrac{dX}{X}=\dfrac{d\omega}{\omega}+\dfrac{dt}{t}\Rightarrow dX=X\left[\dfrac{d\omega}{\omega}+\dfrac{dt}{t}\right]$

D'où :

$$\frac{dy}{y}=\frac{dy_0}{y_0}-\omega t\left(\frac{d\omega}{\omega}+\frac{dt}{t}\right)$$

On passe à l'incertitude relative pour en déduire l'incertitude absolue :

$$\boxed{\frac{\Delta y}{y}=\frac{\Delta y_0}{y_0}+\omega t\left(\frac{\Delta\omega}{\omega}+\frac{\Delta t}{t}\right)\Leftrightarrow\Delta y=y\left[\frac{\Delta y_0}{y_0}+t\Delta\omega+\omega\Delta t\right]}$$